非負作用素と埋蔵定理 (補間空間の理論およびその応用)

小松, 彦三郎

数理解析研究所講究録
136巻 1972年 1-27

非負作用素と埋蔵定理

東大理　小松彦三郎

作用素の補間という考え方は，L^p空間の間の線型作用素に対する M. Riesz [23] の凸定理に源を発する．M. Riesz の理論は一方では函数論を用いた Thorin [29] の理論によって適用範囲が拡がり，一方 Marcinkiewicz [18] [33]，Stein-Weiss，Calderon および Hunt [9] 等によって L^p空間において必ずしも連続にならない非線型作用素に適用できる形に拡張された．たゞし，どちらも一長一短があり，二つの流儀の一方が他より優れているとはいえない．

以上はL^p空間およびそれに附随する空間の間の作用素を対象とするものであるが，1960年代に入って，Lions，Gagliardo 等の努力により，一般の Banach 空間の間に作用する作用素に適用できる補間空間の理論へと成長した．以来多くの学者によって多くの補間理論が考え出されたが，見掛上異なる方法も多くの場合一致し，結局のところ Calderon [4]，Lions [16] による複素的方法と，Lions-Peetre

[17], Peetre [21] による実的方法の二つに帰着される. これらはそれぞれ Thorin の理論と Marcinkiewicz-Hunt の理論を拡張したものになっている. しかしながら, 実際の適用例をみると, あとの抽象的理論では作用素の半群の生成作用素の巾の定義域ともとの Banach 空間との補間空間, 具体的には分数巾ポテンシャルあるいは Hölder 連続な函数族が問題とされることが多い.

Sobolev の埋蔵定理 [24] はこれら二つの補間法の関係を示すものと理解することができる. われわれの目的はこれをより抽象的な作用素論の立場から見なおすことである.

ところで, 埋蔵定理については Hardy-Littlewood による先駆的な仕事 [6] [7] があることを注意しておきたい. Hardy-Littlewood は一変数の場合しか扱っていないが, この場合に限っていえば, Sobolev よりはるかに完全な結果を与えている. Hardy-Littlewood の論文と、Sobolev の論文をくらべてみると, 後者が前者の完全な模倣であることがわかる. しかも, Sobolev の主要な結果は, 藤原大輔が指摘したように, 簡単に Hardy-Littlewood の結果に帰着できる. Sobolev の行ったようなむつかしい計算は実は必要ではない.

Hardy-Littlewood の仕事は, 作用素の分数巾の研

究の先駆でもある．私は作用素の分数巾の研究を通じて，この論文を知り，ここで得られている結果をわれわれの立場で理解しようと努めた．その結果として，例えば一変数のHölder連続な函数の空間などは一応論じたことがある．

Hardy-Littlewoodの理論を多変数に拡張したものには，Sobolevの仕事の他にBernsteinの近似理論の伝統をうけついだNikolskii，Besov [2]の仕事，そしてもともとの行き方により忠実なCalderon-Zygmund，Taibleson [28]，Stein-Zygmund [27]の仕事等がある．Stampacchia [25, 26]もみのがせない．

これらの結果を現代の補間空間論の立場から再構築するという試みは既にLions-Peetre [17]，Butzer-Berens [3]，Grisvard [5]，Peetre [22]によって行なわれている．しかし，いずれもまだ十分徹底的ではないように思われる．

ここでは，埋蔵定理についての吉川の仕事[30][31][32]，多変数の扱いについての村松の仕事[19]を足がかりとして，多変数の埋蔵定理をより徹底的に作用素論の立場で取扱ってみたい．得られた結果はSobolev-Besov空間の埋蔵定理としても，必ずしも全部が全部知られた結果ばかりではないように思う．たゞし，Sobolev等の論文は低次元の部分多様

体への制限についての結果を含んでいるが，そこまではまだできていない．

1．非負作用素． Banach空間 X で定義された閉線型作用素 A が非負とは，$(-\infty, 0)$ がレゾルヴェント集合 $\rho(A)$ に含まれ，かつレゾルヴェントが次の評価をみたすことをいう：

(1) $\quad \|\lambda(\lambda+A)^{-1}\| \leqq M < \infty, \quad 0 < \lambda < \infty.$

非負作用素 A が ω 型 $(0 \leqq \omega < \pi)$ とは，定義域 $D(A)$ が稠密，スペクトル集合 $\sigma(A) \subset \{\lambda ; |\arg \lambda| \leqq \omega\}$，かつ任意の $\varepsilon > 0$ に対し

(2) $\quad \|\lambda(\lambda+A)^{-1}\| \leqq M_\varepsilon < \infty, \quad |\arg \lambda| < \pi - \omega - \varepsilon$

がなりたつことをいう．

$T(t) = \exp(-tA)$ が(一様)有界(強)連続半群ならば，A は $\pi/2$ 型の非負作用素である．（逆は必ずしも成立しない．Hille-Phillips [8] と Komatsu [11] に反例が与えられている．ただし，Ōuchi [20] によれば，A が $\pi/2$ 型の非負作用素であるとき，$-A$ は佐藤超函数の意味の半群を生成する．）

半群 $T(t) = \exp(-tA)$ が $(\pi/2 - \omega)$ 型の有界解析的半群とは扇形 $\{t ; |\arg t| < \pi/2 - \omega\}$ まで連続に解析接

続され，任意の閉部分扇形上一様有界であることと定義する。このとき，A は ω 型（$\omega < \pi/2$）の非負作用素であり，逆も成立する（Kato, Komatsu [10]）。

例. $X = L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqq p < \infty$ とする。(i) 平行移動半群 $T(t)$ は有界連続半群であって，$A = -d/ds$ は $\pi/2$ 型の非負作用素，(ii) Gauss-Weierstrass 積分あるいは温度 $T(t)$ は $\pi/2$ 型の有界解析的半群であり，$A = -\frac{1}{2}\Delta$ は 0 型の非負作用素，(iii) Poisson 積分 $T(t)$ も $\pi/2$ 型有界解析的半群であって，$A = \sqrt{-\Delta}$ は 0 型の非負作用素である。

2. $(X, D(A^m))$, $(X, R(A^m))$ の実補間空間.

A を Banach 空間 X における非負作用素，m を整数，$0 < \sigma < m$ かつ $1 \leqq p \leqq \infty$ または $p = \infty-$ とする。このとき，実補間空間

(3) $$D_p^\sigma(A) = (X, D(A^m))_{\sigma/m, p}$$

は $m > \sigma$ に無関係な Banach 空間となり，

(4) $$D_p^\sigma(A) = \{x \in X;\ \lambda^\sigma (A(\lambda + A)^{-1})^m x \in L_*^p(X)\}$$

と特徴づけられる（Grisvard [5], Komatsu [12]）。

ただし，

$$L_*^p(X) = L^p((0, \infty), d\lambda/\lambda, X)$$

は $(0,\infty)$ 上の乗法群の Haar 測度 $d\lambda/\lambda$ に関する X 値 L^p 空間を表わす．指数として $1 \leqq p \leqq \infty$ の他に，$p = \infty-$ を許し，

$$L_*^{\infty-}(X) = \{f(\lambda) \in L_*^{\infty}(X)\ ;\ f(\lambda) \to 0\ ,\ \lambda \to 0 \text{ or } \infty\}$$

とする．この指数も有用である．

$-A$ が有界連続半群 $T(t)$ を生成するときは

(5) $\quad D_p^\sigma(A) = \{x \in X\ ;\ t^{-\sigma}(1-T(t))^m x \in L_*^p(X)\}$

(Lions-Peetre [17])．

$-A$ が有界解析的半群 $T(t)$ を生成するときは

(6) $\quad D_p^\sigma(A) = \{x \in X\ ;\ t^{-\sigma} t^m A^m T(t) x \in L_*^p(X)\}$

(Berens [1], Komatsu [12])．

同様に，

(7) $\quad R_p^\sigma(A) = (X, R(A^m))_{\sigma/m, p}$

も，$m > \sigma$ に無関係であり，A が一般の非負作用素の場合，$-A$ が有界連続半群を生成する場合，有界解析的半群を生成する場合に応じて，

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
R_p^\sigma(A) &= \{x \in X\ ;\ \lambda^\sigma(\lambda(\lambda+A)^{-1})^m x \in L_*^p(X)\} \\
&= \{x \in X\ ;\ t^\sigma(t^{-1}I(t))^m x \in L_*^p(X)\} \\
&= \{x \in X\ ;\ t^\sigma T(t) x \in L_*^p(X)\}
\end{aligned}
$$

と特徴づけることができる (Komatsu [13])．ここで

(9) $\quad I(t)x = \int_0^t T(s)x\,ds$

とする．

$0 < \mathrm{Re}\,\alpha < \sigma$ のとき，$x \in D_p^\sigma(A)$ となるための必要十分条件は，$x \in D(A^\alpha)$ かつ $A^\alpha x \in D_p^{\sigma-\mathrm{Re}\,\alpha}(A)$ となることである（Lions-Peetre [17], Komatsu[12]).

特に，$\sigma = \nu + \tau$，ν 整数，$0 < \tau \leqq 1$ とすると，

$$
(10)\quad
\begin{aligned}
x \in D_p^\sigma(A) \iff x \in D(A^\nu) \ &\text{かつ} \\
&\lambda^\tau (A(\lambda+A)^{-1}) A^\nu x \in L_*^p(X) \\
\text{または}\quad &t^{-\tau}(1-T(t))A^\nu x \in L_*^p(X) \\
\text{または}\quad &t^{-\tau}(tA)T(t)x \in L_*^p(X).
\end{aligned}
$$

ただし，$\tau = 1$ のときは（　）を（　$)^2$ におきかえる．特に，$-A$ が有界連続半群を生成する場合には，$x \in D_p^\sigma(A)$ とは，$T(t)x$ が ν 回連続微分可能かつ ν 位の導関数が L_*^p の意味で τ 次の Hölder 連続（$0 < \tau < 1$）になることもしくは Zygmund の意味で smooth（$\tau = 1$）になることに他ならない．

<u>3. 非負作用素の補間.</u> この節の結果は主として，Grisvard [5], Yoshikawa [31], [32] による．

X_0, X_1 を Banach 空間の補間対，すなわち，共通の Hausdorff 線型位相空間に含まれる Banach 空間の対と

する．

X_0, X_1 における非負作用素 A_0, A_1 が適合条件

(11) $$A_0 x = A_1 x, \quad x \in D(A_0) \cap D(A_1),$$

(12) $$(\lambda + A_0)^{-1} x = (\lambda + A_1)^{-1} x, \quad x \in X_0 \cap X_1, \quad 0 < \lambda < \infty$$

をみたすとする．(Yoshikawa [31] は $D(A_0)$, $D(A_1)$ が共に稠密のとき，(12) から (11) が導かれることを示した．) このとき，Banach 空間

(13) $$X = X_0 + X_1$$

において，

(14) $$\begin{cases} D(A) = D(A_0) + D(A_1) \\ Ax = A_0 x_0 + A_1 x_1, \quad x = x_0 + x_1, \quad x_i \in D(A_i) \end{cases}$$

によって定められる作用素 A は非負であり，レゾルヴェントは

(15) $$(\lambda + A)^{-1} x = (\lambda + A_0)^{-1} x_0 + (\lambda + A_1)^{-1} x_1, \quad x = x_0 + x_1$$

となる．A_i は A の X_i における最大制限，すなわち

$$D(A_i) = \{ x \in D(A) \cap X_i \ ; \ Ax \in X_i \}$$

を定義域とする制限に等しい．

(16) $$X_\theta = [X_0, X_1]_\theta, \quad 0 < \theta < 1,$$

(17) $$X_{\theta, p} = (X_0, X_1)_{\theta, p}, \quad 0 < \theta < 1, \quad 1 \leqq p \leqq \infty$$
または $p = \infty -$

をそれぞれ (X_0, X_1) の複素補間空間および実補間空間，

A_θ, $A_{\theta,p}$ をそれぞれ A の X_θ および $X_{\theta,p}$ における最大制限とする．これらもそれぞれの空間で非負作用素となる．以下添字 θ または θ, p を略して $\theta*$ とかく．

$-A_i$, $i=0,1$, が有界連続（解析的）半群 $T_i(t)$ を生成するときは，$-A$ および，$p=\infty$ を除いて，$-A_{\theta*}$ も有界連続（解析的）半群 $T(t)$ および $T_{\theta*}(t)$ を生成する．$T_{\theta*}(t)$ は $T_i(t)$ の補間作用素に等しい．

4. Yoshikawa の補間定理．ρ を正の数，$m>\rho$ を整数とする．A が $R^\rho(X_0, X_1)$ 族とは，任意の $x \in X_1$ に対して，$\lambda>0$ ならば $(\lambda(\lambda+A)^{-1})^m x \in X_0$ かつ x によらない定数 K が存在して

$$(18) \qquad \|(\lambda(\lambda+A)^{-1})^m x\|_{X_0} \leqq K\lambda^\rho \|x\|_{X_1}, \quad x \in X_1$$

がなりたつことであると定義する（Yoshikawa [30]）．これは $m>\rho$ のとり方によらない性質である．

$-A_i$, $i=0,1$, が有界連続半群を生成する場合は，任意の $x \in X_1$ に対し $T(t)x$ が X_0 値連続函数となり評価：

$$(19) \qquad \|(t^{-1}I(t))^m x\|_{X_0} \leqq K t^{-\rho} \|x\|_{X_1}, \quad x \in X_1$$

をみたすことと同等である．

同じ場合，評価

(20) $\quad \|T(t)x\|_{X_0} \leqq K t^{-\rho} \|x\|_{X_1}, \quad x \in X_1$

をみたせば，A は $R^\rho(X_0, X_1)$ 族になる．$-A_i$, $i=0,1$, が有界解析的半群を生成する場合は，これは必要條件にもなる（Yoshikawa [31]）．

<u>定理</u>．A を $R^\rho(X_0, X_1)$ 族とする．

(i) $\sigma > \rho \Rightarrow D_p^\sigma(A_1) \subset D_p^{\sigma-\rho}(A_0)$.

(Yoshikawa [30] [31] [32]).

(ii) $\sigma < \rho \Rightarrow D_p^\sigma(A_1) \subset X_{1-\sigma/\rho, p}$.

(iii) $\sigma = \rho$, $p = 1 \Rightarrow D_p^\sigma(A_1) \subset X_0$.

(iv) $\sigma = \rho$, $p > 1 \Rightarrow$

$$D_p^\sigma(A_1) \subset X_{\theta,q}, \quad 0<\theta<1, \ 1 \leqq q \leqq \infty$$

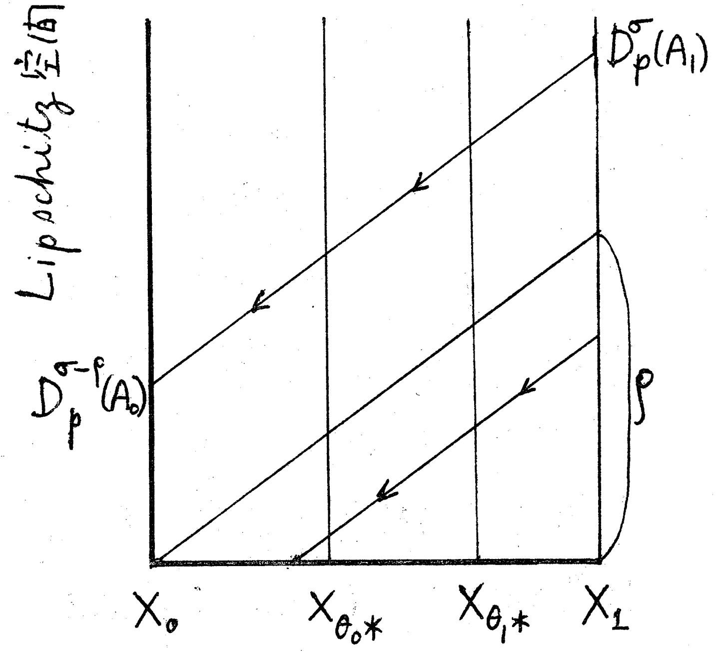
かつ，$0 < \theta \leqq \theta_0 < 1$ および $1 \leqq q \leqq \infty$ によらない定数 C が存在して

(21) $\quad \|x\|_{X^K_{\theta,q}} \leqq C\,\theta^{-(1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \|x\|_{D_p^\sigma(A_1)}$.

ただし，$\|x\|_{X^K_{\theta,q}}$ は $(X_0, X_1)_{\theta,q}$ における Peetre [21] の K ノルムをあらわす．

A が $R^\rho(X_0, X_1)$ 族かつ $0 \leqq \theta_0 < \theta_1 \leqq 1$ ならば，A は $R^{(\theta_1-\theta_0)\rho}(X_{\theta_0,*}, X_{\theta_1,*})$ 族になる（Yoshikawa [32]）．

これを用いれば，次頁の図が示すように，埋蔵関係



Lebesgue空間および
Lorentz空間

$$D_p^\sigma(A_{\theta_1 *}) \subset D_p^{\sigma-(\theta_1-\theta_0)\rho}(A_{\theta_0 *})$$

等がなりたつ事が示される.

さて, A_i, $i=0,1$, を§1例(i)においてそれぞれ $X_0=BUC(\mathbb{R}^1)$ (有界一様連続函数族), $X_1=L^1(\mathbb{R})$ として得られる非負作用素とすれば, 條件(19)から明らかなように, A は $R^1(X_0, X_1)$ 族に属する.

この場合, X_θ は Lebesgue 空間 $L^{1/\theta}(\mathbb{R})$ に, $X_{\theta,q}$ は Lorentz 空間 $L^{(1/\theta,q)}(\mathbb{R})$ に等しく, $D_p^{\nu+\tau}(A_0)$, $\nu\in\mathbb{N}$, $0<\tau\leqq 1$, は§2で示したように, ν回一様連続微分可能かつν位の導函数が L^p_* の意味で τ次の一様 Hölder 連続または smooth な函数からなる Lipschitz 空間に等しい. 従って, この場合の埋蔵定理は Hardy-Littlewood の埋蔵定理に他ならない.

§1例(ii), (iii)の非負作用素についても, (20)から容易に A はそれぞれ $R^{n/2}(BUC(\mathbb{R}^n), L^1(\mathbb{R}^n))$ 族および $R^n(BUC(\mathbb{R}^n), L^1(\mathbb{R}^n))$ 族になることが示される. こ

の場合も $D_p^\sigma(A_0)$ は Lipschitz 空間となるので，上の定理から $\mathbb{R}^n$ における Sobolev - Besov の埋蔵定理が得られる．この証明は本質的に Taibleson [28] の証明と同じである．$p=1$ が例外とならない点で，Sobolev の不等式を用いる証明より有利である．

(21) の評価は John - Nirenberg によって導入された有界平均振動の函数の空間と関係が深いのであるが，詳細は省略する．(Stampacchia [25], Grisvard [5], Peetre [22] 等を参照せよ。)

5. 非負作用素の可換族. Muramatu [19] に従って，レゾルヴェントをもつ二つの閉線型作用素 A, B は，レゾルヴェント $(\lambda+A)^{-1}$, $(\mu+B)^{-1}$ が（一組の λ, μ について）可換であるとき，可換であるという．

(22) $$\mathbb{A}=\{A^{(1)},\ \cdots,\ A^{(n)}\}$$

を互に可換な非負作用素からなる組とする．$\sigma=(\sigma_1,\ \cdots,\sigma_n)$ $\sigma_j>0$, $1\leqq p\leqq\infty$ または $p=\infty-$ に対して，

(23) $$D_p^\sigma(\mathbb{A})=\bigcap_{j=1}^{n} D_p^{\sigma_j}(A^{(j)})$$

と定義する．

§4 同様，X_0, X_1 は Banach 空間の補間対，

(24) $$\mathbb{A}_0=\{A_0^{(1)},\ \cdots,\ A_0^{(n)}\},$$

(25) $$\mathcal{A}_1 = \{A_1^{(1)}, \cdots, A_1^{(n)}\}$$

はそれぞれ X_0, X_1 における非負作用素の可換族であって各 j に対して, $A_0^{(j)}$ と $A_1^{(j)}$ は適合しているとする. このとき, X, X_θ および $X_{\theta,p}$ における非負作用素の可換族 $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_\theta$ および $\mathcal{A}_{\theta,p}$ が §4 と同様に定義される.

$\mathcal{A}$ が $\mathcal{R}^\rho(X_0, X_1)$ 族, $\rho = (\rho_1, \cdots, \rho_n)$, $\rho_j > 0$, であるとは, $m_j > \rho_j$ を整数として, 次の評価がなりたつことであると定義する:

(26)
$$\begin{aligned} &\|(\lambda_1(\lambda_1 + A^{(1)})^{-1})^{m_1} \cdots (\lambda_n(\lambda_n + A^{(n)})^{-1})^{m_n} x\|_{X_0} \\ &\qquad \leq K \lambda_1^{\rho_1} \cdots \lambda_n^{\rho_n} \|x\|_{X_1}, \quad x \in X_1. \end{aligned}$$

$-A_i^{(j)}$, $i = 0, 1$, $j = 1, \cdots, n$, が有界連続半群 $T_i^{(j)}(t)$ を生成するときは, これは任意の $x \in X_1$ に対して, $I^{(1)}(t_1)^{m_1} \cdots I^{(n)}(t_n)^{m_n} x$ が X_0 値連続函数となり,

(27)
$$\begin{aligned} &\|(t_1^{-1} I^{(1)}(t_1))^{m_1} \cdots (t_n^{-1} I^{(n)}(t_n))^{m_n} x\|_{X_0} \\ &\qquad \leq K t_1^{-\rho_1} \cdots t_n^{-\rho_n} \|x\|_{X_1}, \quad x \in X_1 \end{aligned}$$

をみたすことと同等である.

$-A_i^{(j)}$ が有界連続半群 $T_i^{(j)}(t)$ を生成し,

(28) $$\|T^{(1)}(t_1) \cdots T^{(n)}(t_n) x\|_{X_0} \leq K t_1^{-\rho_1} \cdots t_n^{-\rho_n} \|x\|_{X_1}$$

をみたすならば, $\mathcal{A}$ は $\mathcal{R}^\rho(X_0, X_1)$ 族に属し, 逆に, $-A_i^{(j)}$ が有界解析的半群 $T_i^{(j)}(t)$ を生成し, $\mathcal{A}$ が $\mathcal{R}^\rho(X_0, X_1)$ 族ならば, (28) がなりたつ.

<u>定理</u>. A は $R^{\rho}(X_0, X_1)$ 族であるとする, $\sigma=(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$ $\sigma_j>0$, に対して

$$(29)\qquad \kappa=\sum_{j=1}^{n}\frac{\rho_j}{\sigma_j}$$

とおく.

(i) $\kappa<1 \Rightarrow D_p^{\sigma}(A_1)\subset D_p^{(1-\kappa)\sigma}(A_0)$,

(ii) $\kappa>1 \Rightarrow D_p^{\sigma}(A_1)\subset X_{1-\frac{1}{\kappa},p}$,

(iii) $\kappa=1,\ p=1 \Rightarrow D_p^{\sigma}(A_1)\subset X_0$,

(iv) $\kappa=1,\ p>1 \Rightarrow$

$$D_p^{\sigma}(A_1)\subset X_{\theta,q},\quad 0<\theta<1,\ 1\leqq q\leqq\infty$$

かつ

$$(30)\qquad \|x\|_{X^{\kappa}_{\theta,q}}\leqq C\,\theta^{-(1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}\|x\|_{D_p^{\sigma}(A_1)}.$$

<u>証明</u>. $R^{\rho}(A)$ でもって

$$(31)\qquad \|(\lambda_1(\lambda_1+A^{(1)})^{-1})^{m_1}\cdots(\lambda_n(\lambda_n+A^{(n)})^{-1})^{m_n}x\|_X\leqq C\lambda_1^{\rho_1}\cdots\lambda_n^{\rho_n}$$

をみたす $x\in X$ 全体のなす Banach 空間を表わす. われわれの証明は, $x\in D_p^{\sigma}(A)\cap R^{\rho}(A)$ に対してなりたつ次の積分表示を根拠とする:

$$(32)\qquad x=\prod_{j=1}^{n}\frac{\Gamma(2m_j)}{\Gamma(m_j)^2}\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}\prod_{j=1}^{n}\{(A^{(j)}(\lambda_j+A^{(j)})^{-1})^{m_j}(\lambda_j(\lambda_j+A^{(j)})^{-1})^{m_j}\}x\,\frac{d\lambda_1}{\lambda_1}\cdots\frac{d\lambda_n}{\lambda_n}.$$

仮定により $D_p^{\sigma}(A_1)\subset D_p^{\sigma}(A)\cap R^{\rho}(A)$ ゆえ, $x\in$

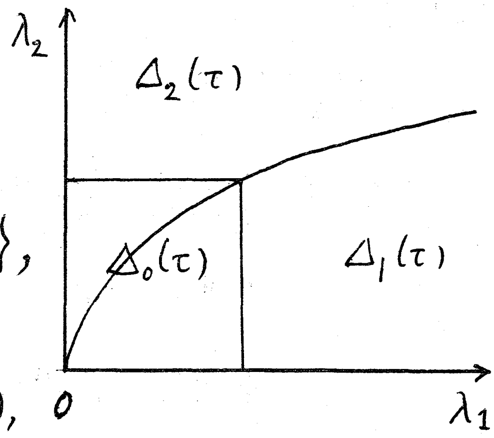
$D_p^{\sigma}(A_1)$ に対して上の表示が適用できる．

(i) $\tau > 0$ とし，(32) の積分区間を次のように分ける．

$$\Delta_0(\tau) = \{\lambda\,;\, 0 < \lambda_k \leqq \tau^{1/\sigma_k},\ k = 1, 2, \cdots, n\},$$

$$\Delta_j(\tau) = \{\lambda\,;\, \tau^{1/\sigma_j} < \lambda_j < \infty,\ 0 < \lambda_k < \lambda_j^{\sigma_j/\sigma_k},\ k \neq j\},$$

$$j = 1, 2, \cdots, n.$$



それぞれの領域の上の積分を $I_0(\tau)$, $I_1(\tau), \cdots, I_n(\tau)$ とおく．

$$\|I_0(\tau)\|_{X_0} \leqq C\int_0^{\tau^{1/\sigma_1}}\cdots\int_0^{\tau^{1/\sigma_n}} \lambda_1^{\rho_1}\cdots\lambda_n^{\rho_n}\|x\|_{X_1}\frac{d\lambda_1}{\lambda_1}\cdots\frac{d\lambda_n}{\lambda_n}$$

$$(33) \qquad = \frac{C\,\tau^{k}}{\rho_1\cdots\rho_n}\|x\|_{X_1}.$$

$$\|I_1(\tau)\|_{X_0} \leqq C\int_{\tau^{1/\sigma_1}}^{\infty}\lambda_1^{\rho_1}\|(A^{(1)}(\lambda_1+A^{(1)})^{-1})^{m_1}x\|_{X_1}\frac{d\lambda_1}{\lambda_1}\int_0^{\lambda_1^{\sigma_1/\sigma_2}}\cdots\int_0^{\lambda_1^{\sigma_1/\sigma_n}}\lambda_2^{\rho_2}\cdots\lambda_n^{\rho_n}\frac{d\lambda_2}{\lambda_2}\cdots\frac{d\lambda_n}{\lambda_n}$$

$$(34) \qquad = \frac{C}{\rho_2\cdots\rho_n}\int_{\tau^{1/\sigma_1}}^{\infty}\lambda_1^{(k-1)\sigma_1}\|\lambda_1^{\sigma_1}(A^{(1)}(\lambda_1+A^{(1)})^{-1})^{m_1}x\|_{X_1}\frac{d\lambda_1}{\lambda_1}$$

$$\leqq \frac{C}{\rho_2\cdots\rho_n}\frac{\tau^{k-1}}{((1-k)\sigma_1 p')^{1/p'}}\|\lambda_1^{\sigma_1}(A^{(1)}(\lambda_1+A^{(1)})^{-1})^{m_1}x\|_{L^p_*(X_1)}.$$

$j = 2, \cdots, n$ についても同様に評価されるから，まず，

$x \in X_0$ がわかる．

ここで，(33)，(34) において x に $(A^{(k)}(\tau_k + A^{(k)})^{-1})^{m_k} x$ を代入し，τ に $\tau_k^{\sigma_k}$ を代入すれば，

$$
\begin{aligned}
&\|\tau_k^{(1-\kappa)\sigma_k}(A^{(k)}(\tau_k + A^{(k)})^{-1})^{m_k} x\|_{L^p_*(X_0)} \\
&\le C\{\|\tau_k^{\sigma_k}(A^{(k)}(\tau_k + A^{(k)})^{-1})^{m_k} x\|_{L^p_*(X_1)} \\
&\quad + \|\lambda_1^{\sigma_1}(A^{(1)}(\lambda_1 + A^{(1)})^{-1})^{m_1} x\|_{L^p_*(X_1)} + \cdots \\
&\quad + \|\lambda_n^{\sigma_n}(A^{(n)}(\lambda_n + A^{(n)})^{-1})^{m_n} x\|_{L^p_*(X_1)}\}
\end{aligned}
\tag{35}
$$

を得る．積分

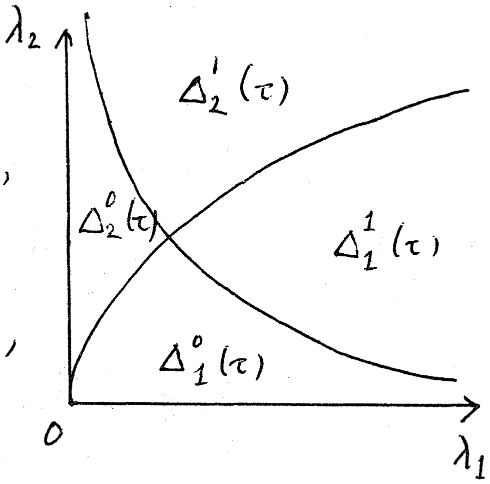
$$
\int_{\tau_k^{\sigma_k/\sigma_j}}^{\infty} (\tau_k^{\sigma_k}/\lambda_j^{\sigma_j})^{(1-\kappa)} \|\lambda_j^{\sigma_j}(A^{(j)}(\lambda_j + A^{(j)})^{-1})^{m_j} x\|_{X_1} \frac{d\lambda_j}{\lambda_j}
$$

は本質的には乗法群 $(0, \infty)$ 上のたたみこみと同じであり，Young の不等式により，2番目以下の項が評価されるからである．

(ii). (32) の積分区間を

$$
\Delta_j^0(\tau) = \{\lambda\,;\ 0 < \lambda_k < \lambda_j^{\sigma_j/\sigma_k},\ k \neq j,\ \lambda_1^{p_1} \cdots \lambda_n^{p_n} \le \tau^{\kappa}\},
$$

$$
\Delta_j^1(\tau) = \{\lambda\,;\ 0 < \lambda_k < \lambda_j^{\sigma_j/\sigma_k},\ k \neq j,\ \lambda_1^{p_1} \cdots \lambda_n^{p_n} > \tau^{\kappa}\},
$$



と $2n$ 個の領域に分け，それぞれの上の積分 $I_j^0(\tau)$，$I_j^1(\tau)$ を評価する．

今度は log を含む因子がでてきて，計算が少し複雑になるが，上とほぼ同様に次の不等式が証明される：

(36) $\|\tau^{1-k} I_j^0(\tau)\|_{L_*^p(X_0)} \leqq C \|\lambda_j^{\sigma_j}(A^{(j)}(\lambda_j + A^{(j)})^{-1})^{m_j} x\|_{L_*^p(X_1)}$

(37) $\|\tau I_j^1(\tau)\|_{L_*^p(X_1)} \leqq C \|\lambda_j^{\sigma_j}(A^{(j)}(\lambda_j + A^{(j)})^{-1})^{m_j} x\|_{L_*^p(X_1)}$.

実補間空間の定義によって，これから $x \in X_{1-\frac{1}{k},p}$ がわかる。

(iii) は (32) から直ちに導かれる．

(iv) の前半は (ii) と $D_p^\sigma(A_1) \subset D_g^{(1-\theta)\sigma}(A_1)$ から明らかである。(30) も上の包含写像および (ii) の埋蔵写像のノルムをていねいに評価すれば得られる。

同様の方法で次の命題を証明することができる．これは全く別の方法で Muramatu [19] が得た結果の拡張となっている．(Grisvard [5] も同様の結果をきわめて強い付帯条件の下で証明している．)

<u>命題.</u> A を Banach 空間 X における非負作用素の可換族とする．

$$\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n), \quad \sigma_j > 0,$$
$$\alpha^{(k)} = (\alpha_1^{(k)}, \ldots, \alpha_n^{(k)}), \quad k = 1, \ldots, N$$

が次の性質をもつとする：

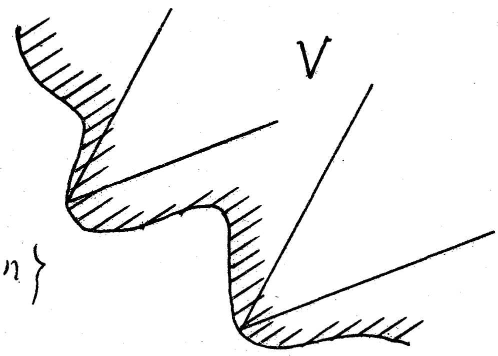
(i) $\alpha_j^{(k)} = 0$ または $Re\, \alpha_j^{(k)} > 0$;

(ii) $$\sum_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{Re}\,\alpha_j^{(k)}}{\sigma_j} = 1, \quad k=1, \cdots, N;$$

(iii) 各 $j=1,\cdots,n$ につき，$\mathrm{Re}\,\alpha_j^{(k)} = \sigma_j$ となる $\alpha_j^{(k)}$ が存在する。このとき

(38) $$\Bigl(X, \bigcap_{k=1}^{N} D(A_1^{\alpha_1^{(k)}} \cdots A_n^{\alpha_n^{(k)}})\Bigr)_{\theta,p} = D_p^{\theta\sigma}(A).$$

6. Sobolev-Besov の埋蔵定理. $V \subset R^n$ を次の意味で一様錐条件をみたす領域とする：原点を頂点とする開凸錐 C が存在して，すべての点 $s \in V$ に対し，$s + C \subset V$.



必要があれば適当なアフィン変換をして

$$C \supset \{s\,;\, s_j > 0,\ j=1,\cdots,n\}$$

としてさしつかえない.

$$X_0 = L^\infty(V), \quad X_1 = L^1(V)$$

にとる. $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$ または $q = \infty-$ に対し，

$X_{1/p} = X_{1/p,p} = L^p(V)$: Lebesgue 空間

$X_{1/p,q} = L^{(p,q)}(V)$: Lorentz 空間

である. $x \in X = L^\infty(V) + L^1(V)$, $j=1,\cdots,n$, のとき，

(39) $$T^{(j)}(t)\,x(s) = x(s_1,\cdots,s_j+t,\cdots,s_n)$$

とおく. これは X_i, $i=0,1$, において互に可換な有界半群

をなす．$X_0 = L^\infty(V)$においては，tに関する強連続性がなりたたないが，$L^1(V)$における強連続半群$S^{(j)}(t)$の双対となっているため，強連続の場合とほゞ同様にとりあつかうことができる。§4と同様に，$BUC(V)$に制限して扱ってもよい．補間空間$D_p^\sigma(A_0)$，$X_{\theta *}$等はX_0として$L^\infty(V)$をとっても$BUC(V)$をとっても同じになる[14]．

対応する非負作用素は，超函数の意味の微分

(39) $$A^{(j)} = -\frac{\partial}{\partial s_j}$$

を，それぞれの空間において最大に制限したものに等しい．

Aは$\mathcal{R}^{(1,1,\cdots,1)}(X_0, X_1)$族である．実際

(40) $$\| I^{(1)}(t_1)\cdots I^{(n)}(t_n)x\|_{L^\infty(V)} \leqq \|x\|_{L^1(V)}$$

より容易に条件(27)がたしかめられる．

V上のBesov空間を

$$B_{p,r}^\sigma(V) = D_r^\sigma(A_{1/p}),$$
$$B_{(p,q),r}^\sigma(V) = D_r^\sigma(A_{1/p,q})$$

によって定義する．

$$\|x\|_{B_{p,r}^\sigma(V)} = \|x\|_{L^p(V)} + \sum_{j=1}^n \| t_j^{-\sigma_j}(1 - T_{1/p}^{(j)}(t_j))^{m_j} x\|_{L_*^r(L^p(V))}$$

(41) $$= \|x\|_{L^p(V)} + \sum_{j=1}^n \left\{ \int_0^\infty t^{-r\sigma_j - 1} \left\| \sum_{k=0}^{m_j} (-1)^k \binom{m_j}{k} x(s + kte_j) \right\|_{L^p(V)}^r dt \right\}^{1/r}$$

$$\sim \|x\|_{L^p(V)} + \sum_{j=1}^n \left\{ \int_0^1 t^{-r\tau_j - 1} \left\| \frac{\partial^{\nu_j} x(s)}{\partial s_j^{\nu_j}} - \frac{\partial^{\nu_j} x(s+te_j)}{\partial s_j^{\nu_j}} \right\|_{L^p(V)} dt \right\}^{1/r}.$$

ただし，$\sigma_j = \nu_j + \tau_j$，$\nu_j \in \mathbb{Z}^+$，$0 < \tau_j \leqq 1$ とし，$\tau_j = 1$ のときは，$\|\quad\|$ を

$$\left\| \frac{\partial^{\nu_j} x(s)}{\partial s_j^{\nu_j}} - 2\frac{\partial^{\nu_j} x(s+te_j)}{\partial s_j^{\nu_j}} + \frac{\partial^{\nu_j} x(s+2te_j)}{\partial s_j^{\nu_j}} \right\|_{L^p(V)}$$

でおきかえる．

これから，$V = \mathbb{R}^n$ のとき，われわれの Besov 空間の定義は Besov [2] が与えたものと一致することがわかる。以上で $L^p(V)$ ノルムを $L^{(p,q)}(V)$ ノルムにかえると，$B^{\sigma}_{(p,q),r}(V)$ ノルムが得られる．

$m > 0$ 整数に対して，通常のように <u>Sobolev 空間</u> $W^m_p(V)$ および $W^m_{(p,q)}(V)$ を

(42) $$W^m_{p*}(V) = \{x \in L^{p*}(V);\ D^\alpha x \in L^{p*}(V),\ |\alpha| \leqq m\}$$

によって定義すれば，§5の命題により次の命題を得る．

<u>命題</u> $\sigma = (\sigma, \sigma, \cdots, \sigma)$，$\sigma > 0$，かつ $m > \sigma$ が整数であるとき，

(43) $$B^{\sigma}_{p*,r}(V) = (L^{p*}(V), W^m_{p*}(V))_{\sigma/m,r}.$$

$W^m_{p*}(V)$ は明らかにアフィン座標のとり方によらない．従って，$B^{\sigma}_{p*,r}$ もアフィン座標のとり方によらない．

§5の埋蔵定理と，Muramatu [19] の $A_1^{\alpha_1} \cdots A_n^{\alpha_n}$ の値域についての結果を用いると，次の埋蔵定理を得る．これは $V = \mathbb{R}^n$，$p* = p$ の場合に，Besov [2]，Taibleson [28], Grisvard [5] および Peetre [22] によって得られている結果の拡張となっている。

定理. $p^* = p$ または (p, q),

$1 \leqq p < p' \leqq \infty$, $1 \leqq q, q' \leqq \infty$ または $q, q' = \infty-$,

$1 \leqq r \leqq r' \leqq \infty$ または $r \leqq r' = \infty-$,

$\sigma = (\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$, $\sigma_j > 0$,

$k = (k_1, \cdots, k_n)$, $k_j \geqq 0$ 整数,

(44) $$\sum \frac{k_j}{\sigma_j} < 1$$

とする。このとき, $x(s) \in B^{\sigma}_{p^*, r}(V)$ に対して

(45) $$y = \frac{\partial^{|k|}}{\partial s_1^{k_1} \cdots \partial s_n^{k_n}} x,$$

(46) $$\mu = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}\right) \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sigma_j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{k_j}{\sigma_j},$$

(47) $$p'' = \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sigma_j}}{\frac{1}{p} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sigma_j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{k_j}{\sigma_j} - 1}$$

とおく。

(i) $\mu < 1 \Rightarrow y \in B^{(1-\mu)\sigma}_{p'^{*'}, r'}(V)$.

(ii) $\mu > 1$ または $\mu = 1$, $p' < \infty$

$\Rightarrow y \in L^{(p'', r')}(V)$.

(iii) $\mu = 1$, $p' = \infty$, $r = 1$

$\Rightarrow y \in BUC(V)$.

(iv) $\mu = 1,\ p' = \infty,\ r > 1$

$$\Rightarrow\quad y \in L^s(V),\quad p < s < \infty$$

$$(48)\qquad \sup_{p < s_0 \leqq s < \infty} s^{-1+\frac{1}{r}} \|y\|_{L^s(V)} \leqq C \|x\|_{B^{\sigma}_{p*,r}(V)}.$$

詳細については [15] をみられたい.

参考論文.

[1] H. Berens, *Approximationssätze für Halbgruppenoperatoren in intermediären Räumen*, Schr. Math. Inst. Univ. Münster <u>32</u> (1964), 1–59.

[2] O. V. Besov, *Investigation of a family of function spaces in connection with theorems of imbedding and extension*, Trudy Mat. Inst. Steklov, <u>60</u> (1961), 42–81, Amer. Math. Soc. Translations, Ser. 2, <u>40</u> (1964), 85–126.

[3] P. L. Butzer - H. Berens, *Semi-groups of Operators and Approximation*, Grundlehren Bd. 145, Springer, 1967.

[4] A. P. Calderón, *Intermediate spaces and interpolation, the complex method*, Studia

Math. 24 (1964), 113-190.

[5] P. Grisvard, Commutativité de deux foncteurs d'interpolation et applications, J. Math. Pure Appl. 45 (1966), 143-291.

[6] G. H. Hardy - J. E. Littlewood, Some properties of fractional integrals, Math. Z. 27 (1928), 565-606 and 34 (1932), 403-439.

[7] G. H. Hardy - J. E. Littlewood, Theorems concerning mean values of analytic and harmonic functions, Quart. J. Math. 12 (1941), 221-256.

[8] E. Hille - R. S. Phillips, Functional Analysis and Semi-groups, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 31, 1957.

[9] R. A. Hunt, An extension of the Marcinkiewicz interpolation theorem to Lorentz spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964), 803-807

[10] H. Komatsu, Semi-groups of operators in locally convex spaces, J. Math. Soc. Japan, 16 (1964), 230-262.

[11] H. Komatsu, Fractional powers of operators

Pacific J. Math. 19 (1966), 285–346.

[12] H. Komatsu, Fractional powers of operators II, Interpolation spaces, Pacific J. Math. 21 (1967), 89–111.

[13] H. Komatsu, Fractional powers of operators, III, Negative powers, J. Math. Soc. Japan, 21 (1969), 205–220.

[14] H. Komatsu, Fractional powers of operators, V, Dual operators, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA, 17 (1970), 373–396.

[15] H. Komatsu, Fractional powers of operators VI, Interpolation of non-negative operators and imbedding theorems, to appear in J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA.

[16] J.-L. Lions, Une construction d'espaces d'interpolation, C. R. Acad. Sci. Paris, 251 (1961), 1853–1855.

[17] J.-L. Lions – J. Peetre, Sur une classe d'espaces d'interpolation, Publ Math. IHES 19 (1964), 5–68.

[18] J. Marcinkiewicz, Sur l'interpolation

d'opérations, C. R. Acad. Sci. Paris, 208 (1939), 1272-1273.

[19] T. Muramatu, Product of fractional powers of operators, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA, 17 (1970), 581-590.

[20] S. Ōuchi, Hyperfunction solutions of the abstract Cauchy problem, Proc. Japan Acad. 47 (1971), 541-544.

[21] J. Peetre, Sur le nombre de paramètres dans la définition de certains espaces d'interpolation, Ricerche Mat. 12 (1963), 248-261.

[22] J. Peetre, Espaces d'interpolation et théorème de Soboleff, Ann. Inst. Fourier, 16 (1966), 279-317.

[23] M. Riesz, Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionnelles linéaires, Acta Math. 49 (1926), 465-497.

[24] S. L. Soboleff, Sur un théoreme d'analyse fonctionelle, Mat. Sbornik, 4 (1938), 471-496.

[25] G. Stampacchia, $\mathcal{L}^{(p,\lambda)}$-spaces and interpolation, Comm. Pure Appl. Math. 17 (1964), 293-306.

[26] G. Stampacchia, The spaces $\mathcal{L}^{(p,\lambda)}$, $N^{(p,\lambda)}$ and interpolation, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 19 (1965), 443-462.

[27] E. M. Stein - A. Zygmund, Boundedness of translation invariant operators on Hölder spaces and L^p-spaces, Ann. Math. 85 (1967), 337-349.

[28] M. H. Taibleson, On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidean n-spaces, I. Principal properties, J. Math. Mech. 13 (1964), 407-479.

[29] G. O. Thorin, An extension of a convexity theorem due to M. Riesz, Comm. Sém. Math. Univ. Lund, 4 (1939), 1-5.

[30] A. Yoshikawa, Remarks on the theory of interpolation spaces, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. I, 15 (1968), 209-251.

[31] A. Yoshikawa, An abstract formulation

of Sobolev-type imbedding theorems and its applications to elliptic boundary value problems, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA, 17 (1970), 543 – 558.

[32] A. Yoshikawa, Fractional powers of operators, interpolation theory and imbedding theorems, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA, 18 (1971)

[33] A. Zygmund, On a theorem of Marcinkiewicz concerning interpolation of operations, J. Math. Pures Appl. 35 (1956), 223 – 248.